СОКОЛ Глеб Андреевич

Аспирант кафедры компьютерного моделирования и информационных технологий

Югорский государственный университет
628012, РФ, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16
Контактные телефоны: (3467) 35-77-15, 35-75-38
e-mail: sokolgleb@gmail.com

КУТЫШКИН Андрей Валентинович

Доктор технических наук, профессор кафедры компьютерного моделирования и информационных технологий

Югорский государственный университет
628012, РФ, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16
Контактные телефоны: (3467) 35-77-15, 35-75-38
e-mail: avk_200761@mail.ru

Использование производственных VES-функций для моделирования функционирования экономических систем

Представлены результаты моделирования функционирования экономических систем с использованием производственных функций с переменной эластичностью замещения труда капиталом (VES-функции). Сравнительный анализ результатов моделирования, полученных с применением уже известных аналитических зависимостей для VES-функций, и предложенного авторами алгоритма построения производственных функций этого вида показал целесообразность данного алгоритма для решения аналогичных задач. Для апробации авторского алгоритма построения производственных функций вида VES-функций использовались статистические данные, опубликованные в открытой печати.

JEL classification: C15, C67, D24

Ключевые слова: производственная функция; замещение труда капиталом; эластичность замещения труда капиталом; переменная эластичность.

Введение

Определение основных показателей функционирования экономических систем и производственной деятельности предприятий достаточно часто осуществляется с использованием производственных функций (ПФ). Последние являются одним из инструментов экономико-математического моделирования процесса производства, если его рассматривать как открытую систему, входы которой – затраты ресурсов (материальных и людских), а выходы – производимая продукция. Производственные функции используются также для анализа влияния ряда ключевых факторов (входов) на результаты процесса производства (выхода). Это обусловлено тем, что ПФ в целом отражают достаточно устойчивые количественные соотношения между входами и выходами экономических и производственных систем.

Производственные функции по своей структуре условно можно разделить на линейные, линейно-однородные и однородные. Наибольшее распространение при решении различного рода задач анализа функционирования экономических систем получили производственные функции двух последних видов, известные также как неоклассические производственные функции. Это обусловлено, во-первых, тем, что они оперируют, как правило, только двумя факторами затрат производства – агрегированными факторами затрат труда L и капитала K, оказывающими наиболее существенное влияние на результирующий параметр функционирования данных систем – агрегированный показатель объема выпуска конечной продукции Y; во-вторых, тем, что для определенного вида этих функций – CES-функций (constant elasticity substitution production function) получены аналитические выражения с учетом ключевых свойств неоклассических производственных функций.

Сложность экономических систем, для описания функционирования которых применяются неоклассические производственные функции вида CES-функции, не всегда позволяет утверждать, что значения эластичности замещения труда капиталом σ в рассматриваемых системах постоянны, поскольку данная ситуация является не такой распространенной в реальных условиях функционирования экономических систем. Наряду с этим не всегда возможно достаточно корректное обоснование использования количественных оценок основных параметров ПФ этих видов, полученных в результате статистического анализа ретроспективных данных, при прогнозировании объемов производства продукции при выбранном горизонте планирования. Необходимо также принятие дополнительных допущений, обосновывающих возможность использования производственных функций этих видов, описывающих частные случаи функционирования экономической системы, для ее моделирования, что снижает точность прогнозных оценок.

Видом неоклассических производственных функций, учитывающим изменения значений эластичности замещения труда капиталом σ в экономических системах, являются VES-функции (variable elasticity substitution production function). В настоящее время известны различные варианты аналитического представления производственной функции вида VES-функция.

Ряд авторов [5. P. 2; 7. P. 2; 8. P. 678; 9. P. 64] принимали, что предельная норма замещения труда капиталом γ характеризуется следующей зависимостью от фондовооруженности k рассматриваемой экономической системы:

$$\gamma = \alpha + \beta k, \begin{cases} \beta > 0, \\ -\alpha/\beta < k \end{cases}.$$

Тогда σ определяется зависимостью

$$\sigma(k) = 1 + \left(\alpha/\beta\right) k^{-1}, \left.\begin{matrix} \sigma(k) < 1, \sigma(k) > 1, \\ \dfrac{d\sigma(k)}{dk} < 1, \dfrac{d\sigma(k)}{dk} > 1 \end{matrix}\right\}, \alpha < 0, \alpha > 0,$$

а VES-функция имеет вид

$$Y = Ae^{\lambda t}\left[(1+\beta)KL^{\beta} + \alpha L^{1+\beta}\right]^{1/(1+\beta)}. \quad (1)$$

В работе [6] предложено величину γ оценивать выражением

$$\gamma = k\left(\frac{1}{\alpha + \beta k} - 1\right), \begin{cases} 0 < \alpha < 1, \\ 0 < \alpha + \beta k < 1 \end{cases}.$$

На основании этого были получены зависимости для σ и VES-функции:

$$\sigma(k) = 1 - \frac{\beta k}{(\alpha + \beta k)^2 - \alpha}, \left.\begin{matrix} \sigma(k) < 1, \sigma(k) > 1, \\ \dfrac{d\sigma(k)}{dk} < 1, \dfrac{d\sigma(k)}{dk} > 1 \end{matrix}\right\}, \beta < 0, \beta > 0.$$

$$Y = Ae^{\lambda t} K^{\alpha} L^{1-\alpha} e^{\beta k}. \tag{2}$$

В работе [10. P. 453–455] было предложено эластичность замещения труда капиталом σ представлять в виде $\sigma(k) = a + bk$. В результате был получен общий вид VES-функции для данного случая взаимосвязи σ и k:

$$g = F\left(\frac{K}{L},1\right) = A\exp\int \frac{dk}{k + ck^{1/a}\left(a+bk\right)^{1/a}}.$$

Полученная зависимость в дальнейшем была приведена к следующему виду:

$$Y = AK^{a/1+c}\left[L + \left(\frac{b}{1+c}\right)K\right]^{ac/1+c}.$$

Все параметры представленных выше зависимостей, определяющих VES-функцию, оценивались на основании статистического анализа исходных ретроспективных данных, характеризующих функционирование экономической системы.

Сделанные указанными авторами допущения относительно характера взаимосвязей между γ, σ и k, обеспечивают изменения значений σ в зависимости от величины k, а также выполнение требований, предъявляемых к неоклассическим производственным функциям [4. С. 91]. Возможность использования приведенных выше вариантов VES-функций предполагает также необходимость дополнительного обоснования возможности описания изменений величин γ и σ принятыми зависимостями.

В работе [3. С. 35–38] предложена более общая методика построения неоклассических производственных функций вида VES-функции и представлены результаты реализации этой методики применительно к данным о функционировании экономики СССР в период 1947–1966 гг. [3. С. 89]. Сравнительный анализ расчетных значений Y и значений этого показателя, полученных с использованием производственных функций вида CES-функции [2. С. 93], выявил более высокую точность оценок рассматриваемого показателя по методике работы [3. С. 43].

В настоящей статье представлены результаты сравнительного анализа оценок значений Y, полученных с использованием производственных функций вида CES-функции и вида VES-функции (1), (2), приведенных в работе [8. P. 677–686], и построенной по методике работы [3. С. 35–38] по данным экономики США, представленным в работе [8. P. 687].

Построение δ-однородных производственных функций типа VES-функция

Идентификация структуры производственной функции осуществляется в результате решения следующей системы дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{g'(k)}{g(k)} = \dfrac{\delta}{\gamma(k)+k} \\ \dfrac{\gamma'(k)}{\gamma(k)} = \dfrac{1}{k\sigma(k)} \end{cases}. \tag{3}$$

Здесь δ – показатель однородности производственной функции; k – фондовооруженность: $k = K/L$; $g(k)$ – модифицированная производственная функция:

$$Y = f(K,L) = L^{\delta} f(1,k) \Rightarrow \frac{Y}{L^{\delta}} = y = f(1,k) = g(k); \tag{4}$$

$\gamma(k)$ – предельная норма замещения труда капиталом:

$$\gamma(k)=\frac{\delta g(k)-kg'(k)}{g'(k)}; \tag{5}$$

$\sigma(k)$ – эластичность замещения труда капиталом для δ-однородной производственной функции:

$$\sigma(k)=\frac{1}{k}\left(\frac{d\gamma(k)}{dk}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Величина $\sigma(k)$ задается некоторой функцией, а $\gamma(k)$ и $g(k)$ определяются из решения системы (3). Непосредственно $f(K,L)$ определяется по функции $g(k)$ согласно (4).

В работе [3. С. 35–38] доказано существование и единственность решения системы (3), что позволяет построить δ-однородную производственную функцию типа VES-функция.

При заданном значении δ (предполагается, что выбор значения $\delta\in(0,1]$ осуществляется согласно предварительно сформулированному оптимизационному критерию) достаточно построить функцию $g(k)$, которую можно определить следующими выражениями с учетом структуры функции $\sigma(k)$ [3. С. 35–38]:

$$\gamma(k)=b\cdot\exp\left(\int_a^k\frac{dt}{\sigma(t)t}\right); \tag{7}$$

$$g(k)=c\cdot\exp\left(\int_a^k\frac{\delta dt}{\gamma(t)+t}\right), \tag{8}$$

где a, b, c – некоторые постоянные.

В качестве $\sigma(k)$ можно выбрать, например, некоторую непрерывную, в том числе кусочно-линейную, функцию.

При построении функции $g(k)$ необходимо обеспечить выполнение основных свойств неоклассических производственных функций [3. С. 35–38], в том числе:

$$\frac{dg(k)}{dk}>0\Rightarrow\delta g(k)-k\frac{dg(k)}{dk}>0; \tag{9}$$

$$\frac{d^2g(k)}{dk^2}<0\Rightarrow\delta(\delta-1)g(k)+2k(1-\delta)\frac{dg(k)}{dk}+k^2\frac{d^2g(k)}{dk^2}<0. \tag{10}$$

Исходными данными для построения неоклассической δ-однородной производственной функции типа VES-функция являются множества значений объемов выпуска продукции $Y=f(L,K)$ – $Y=\{Y_i\}$, $(i=1,\dots,n)$ и соответствующие значения $K=\{K_i\}$, $L=\{L_i\}$ в стоимостном или индексном выражении. Они характеризуют функционирование рассматриваемой экономической системы в каждый момент времени T_i в течение определенного интервала времени $[T_1, T_n]$. Так же задаются значения показателя однородности $\delta_j:\delta_j\in\,]0,1]$. По этим данным определяются значения фондовооруженности рассматриваемой экономической системы $k_i={K_i}/{L_i}$ и значения функции $g^{\delta_j}(k_i)$ при фиксированном значении δ_j:

$$g^{\delta_j}(k_i)=\frac{Y_i}{L_i^{\delta_j}}.$$

Далее выполняются следующие процедуры.

1. Значения функции $g^{\delta_j}\left(k_i\right)$ упорядочиваются по возрастанию значений k_i, формируя ряд g_{lj} ($l = 1, \ldots, n_l$; $n_l = n$).

2. Значения g_{lj} аппроксимируются функциями $\tilde{g}_{lj}$, удовлетворяющими требованию

$$F_j = \sum_{l=1}^{n_l}\left(g_{lj} - \tilde{g}_{lj}\right)^2 \to \min \tag{11}$$

с учетом неравенства $0 \le \sigma \le 1$ и следующих ограничений, включая ограничения (9), (10), в которых дифференциальные неравенства заменяются на их разностные аналоги:

$$\delta_l \tilde{g}_{lj} - k_l \frac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l} > 0; \tag{12}$$

$$\frac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l} > 0; \tag{13}$$

$$\delta_j\left(\delta_j - 1\right)\tilde{g}_{lj} + 2k_l\left(1 - \delta_j\right)\frac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l} + k_f^2 \frac{\dfrac{\tilde{g}_{l+2j} - \tilde{g}_{l+1j}}{k_{l+2} - k_{l+1}} - \dfrac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l}}{k_{l+1} - k_l} < 0; \tag{14}$$

$$\frac{\dfrac{\tilde{g}_{l+2j} - \tilde{g}_{l+1j}}{k_{l+2} - k_{l+1}} - \dfrac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l}}{k_{l+1} - k_l} < 0; \tag{15}$$

$$\sigma_{lj} = \frac{\left(k_{l+1j} - k_{lj}\right)\left(\gamma_{l+1j} + \gamma_{lj}\right)}{\left(\gamma_{l+1j} - \gamma_{lj}\right)\left(k_{l+1j} + k_{lj}\right)} \le 1; \tag{16}$$

$$\left|\gamma_{l+1}\right| - \left|\gamma_l\right| > 0, \tag{17}$$

где
$$\gamma_{lj} = \delta_j \cdot \tilde{g}_{lj} \frac{k_{l+1j} - k_{lj}}{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}} - k_{lj}. \tag{18}$$

Минимизация F_j (11) при ограничениях (12)–(17) осуществлялась методом Гаусса – Ньютона с использованием пакета Matlab 7.0 **[1. С. 718–746]**.

3. На основании значений $\tilde{g}_{lj}$ в соответствии с (16), (18) определяются значения γ_{lj} и σ_{lj}.

4. Полученные значения σ_{lj} при допущении $\sigma_{n_l} = \sigma_{n_l-1} = \sigma_{n_l-2}$ аппроксимируются кусочно-линейными функциями с параметрами

$$e_l = \frac{\sigma_{l+1j} - \sigma_{lj}}{k_{l+1} - k_l},\ d_l = \frac{\sigma_{lj} \cdot k_{l+1} - \sigma_{l+1j} \cdot k_l}{k_{l+1} - k_l},\ (l = 1, \ldots, n_l). \tag{19}$$

При этом полагается:

- для участка $[0, k_1]$ $\sigma_j(k) = \sigma_{1j}$;
- для участка $[k_{n-2}, \infty]$ $\sigma_j(k) = \sigma_{n-2j}$.

5. Согласно (7) с учетом (19) рассчитываются значения γ_{lj} ($l = 1, \ldots, n_l$):

$$\overline{\gamma}_{lj} = \overline{\gamma}_{l-1j} \cdot \exp\left(\int_{k_l}^{k_{l+1}} \frac{dt}{\left(e_l \cdot t + d_l\right)t}\right).$$

Для $l = 1$ значение $\overline{\gamma}_{lj}$ определяется выражением (18).

6. Полученные значения $\overline{\gamma}_{lj}$ по аналогии с (19) аппроксимируются кусочно-линейными функциями вида $v_l \cdot t + w_l$.

7. На основании (8) при допущении, что для $l = 1$ значение $\overline{g}_{lj} = \tilde{g}_{lj}$, рассчитываются значения функции $\overline{g}_{lj}$:

$$\overline{g}_{lj} = \overline{g}_{l-1j} \cdot \exp\left(\int\limits_{k_l}^{k_{l+1}} \frac{\delta_j dt}{\left(v_l \cdot t + w_l\right) + t} \right),$$

где v_l, w_l – параметры кусочно-линейных функций, используемых для аппроксимаций $\overline{\gamma}_{lj}$.

8. Определяется относительная величина погрешности ε_{lj}:

$$\varepsilon_{lj} = \left| \frac{\overline{g}_{lj} - g_{lj}}{g_{lj}} \right|, \qquad (20)$$

характеризующая степень расхождения между значениями $\overline{g}_{lj}$ и g_{lj}, и соответствующая величина среднеквадратического отклонения $s_{\varepsilon_{lj}}$.

Из всех вариантов построенных функций $\overline{g}_{lj}$ выбирается тот, который обеспечивает наименьшее значение среднеквадратического отклонения $s_{\varepsilon_{lj}}$ величин ε_{lj} и представляет собой в конечном счете неоклассическую δ-однородную производственную функцию типа VES-функция, описывающую функционирование рассматриваемой экономической системы в течение определенного интервала времени $[T_1, T_n]$.

Совокупность процедур (1)–(8) в целом формирует алгоритм построения δ-однородной производственной функции типа VES-функция.

Апробация алгоритма построения δ-однородной производственной функции типа VES-функция

Апробация описанного выше алгоритма была осуществлена при построении δ-однородных производственных функций типа VES-функция по данным, характеризующим функционирование экономики США в период 1947–1968 гг. (табл. 1) [8. P. 687].

Таблица 1

Данные о функционировании экономики США в 1947–1968 гг.

Год	Y	L	K	$k = K/L$	$g = Y/L$
1947	77657,00	13547,930	1709,340	0,1262	5,7320
1948	83484,00	14226,426	1822,025	0,1281	5,8682
1949	79274,00	13856,344	1785,398	0,1289	5,7211
1950	91946,00	14773,088	1917,069	0,1298	6,2239
1951	101840,00	16094,142	2098,780	0,1304	6,3278
1952	102199,00	16787,144	2197,133	0,1309	6,0879
1953	109438,00	17876,633	2349,975	0,1315	6,1218
1954	102252,00	17494,428	2277,973	0,1302	5,8448
1955	116237,00	18434,472	2409,267	0,1307	6,3054
1956	119274,00	19295,276	2519,575	0,1306	6,1815
1957	118988,00	19808,577	2573,560	0,1299	6,0069
1958	107741,00	19081,420	2460,661	0,1290	5,6464
1959	122448,00	20165,664	2616,817	0,1298	6,0721
1960	122276,00	20725,194	2698,380	0,1302	5,8999
1961	120357,00	20725,417	2707,722	0,1306	5,8072
1962	130589,00	21738,491	2850,761	0,1311	6,0073

Окончание табл. 1

Год	Y	L	K	$k = K/L$	$g = Y/L$
1963	135569,00	22342,636	2942,102	0,1317	6,0677
1964	144393,00	23187,973	3066,187	0,1322	6,2271
1965	156481,00	24659,124	3272,727	0,1327	6,3458
1966	172171,00	26689,048	3555,051	0,1332	6,4510
1967	172015,00	27661,258	3702,961	0,1339	6,2186
1968	181604,00	28792,002	3877,643	0,1347	6,3074

Источник: [8. P. 687].

Эти данные представляют собой временные ряды следующих величин за указанный период времени:

- Y – реальный национальный доход в млн дол. 1958 г., значение которого получено делением величины национального дохода в текущих ценах каждого года на индекс-дефлятор валовой продукции (real income originating in millions of 1958 dollars, derived by dividing real income originating in current dollars by Implicit Price Deflator for Goods Output);
- L – круглогодовые работники (fulltime equivalent employees), тыс. чел.;
- K – валовое накопление основных фондов (здания и оборудование) за вычетом нематериальных активов (gross stocks of structures and equipment) в сотнях млн дол. 1958 г.

Алгоритм был реализован с помощью пакета MatLab 7.0. Минимизация функции F_j (11) осуществлялась с использованием модуля Optimization Toolbox 2.2 данного пакета [1. С. 718–746], предназначенного для поиска экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений. Поскольку в этом модуле используются ограничения нестрогого вида (≤ 0), то правая часть ограничений (12), (13), (18) была заменена на положительную константу α. Величина α принималось равной значению параметра TolFun данного модуля, который обеспечивает прекращение итераций поиска экстремума функции при достижении точности по ее значению: α = TolFun = 10^{-6}.

В табл. 2 приведены:

- производственные функции вида CES-функция (ПФ1 – здесь и далее обозначения авторов) и VES-функция (ПФ2 (1), ПФ3 (2)), идентифицированные методами регрессионного анализа данных табл. 1;
- значения σ для CES-функции и регрессионные зависимости оценки значений данной величины для VES-функций ПФ2 (1) и ПФ3 (2).

В табл. 3 представлены:

- значения Y из табл. 1;
- значения Y, рассчитанные с использованием производственной функции вида CES-функция ПФ1 (табл. 2) и по предложенному в данной статье алгоритму построения неоклассической δ-однородной (при $\delta = 1$) производственной функции типа VES-функция – функция ПФ4, обозначенные как ПФ1 и ПФ4 соответственно;
- значения эластичности замещения фактора труда фактором капитала для функции ПФ1 – $\sigma_{\text{ПФ1}}$ (табл. 2) и рассчитанные по предложенному алгоритму при определении величины ПФ4 – $\sigma_{\text{ПФ4}}$;
- величины относительной погрешности аппроксимации ε_{lj} (20) исходных данных Y, среднего значения относительной ошибки $\overline{\varepsilon}_j$ и ее среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{lj}}$ для функций ПФ1 и ПФ4; для величин ε_{lj}, $\overline{\varepsilon}_j$ и $s_{\varepsilon_{lj}}$ были приняты следующие обозначения: ПФ1 – $\varepsilon_{\text{ПФ1}}$, $\overline{\varepsilon}_{\text{ПФ1}}$, $s_{\varepsilon_{\text{пф1}}}$; ПФ4 – $\varepsilon_{\text{ПФ4}}$, $\overline{\varepsilon}_{\text{ПФ4}}$, $s_{\varepsilon_{\text{пф4}}}$.

В табл. 4 и 5, аналогичных по структуре табл. 3, показаны данные для функций ПФ2, ПФ3 и ПФ4.

Оценка качества аппроксимации исходных данных Y производственными функциями ПФ1, ПФ2, ПФ3 (табл. 2) и предлагаемой δ-однородной производственной функции типа VES-функция (ПФ4) осуществлялась сопоставлением соответствующих значений величин $\varepsilon_{ПФ1}$, $\varepsilon_{ПФ2}$, $\varepsilon_{ПФ3}$, $\varepsilon_{ПФ4}$, $\overline{\varepsilon}_{ПФ1}$, $\overline{\varepsilon}_{ПФ2}$, $\overline{\varepsilon}_{ПФ3}$, $\overline{\varepsilon}_{ПФ4}$, $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$, $s_{\varepsilon_{ПФ2}}$, $s_{\varepsilon_{ПФ3}}$, $s_{\varepsilon_{ПФ4}}$.

Таблица 2

Зависимости для CES- и VES-функций

ПФ	Интервал	Вид производственной функции	Интервал	Значения σ
ПФ1	1943–1968	$Y = 6{,}9061e^{0{,}0182t}\left(0{,}0191K^{-1{,}1395} + \cdots + 0{,}9809L^{-1{,}1395}\right)^{-0{,}8776}$	1947–1963	0,4674
ПФ2	1943–1968	$Y = 6{,}2705e^{0{,}0183t}\left(7{,}7501KL^{6{,}7501} - \cdots - 0{,}3025L^{7{,}7501}\right)^{0{,}129}$	1947–1963	$1 - 0{,}0448k^{-1}$
ПФ3	1943–1968	$Y = 21{,}5091e^{0{,}0181t}K^{0{,}4657}L^{0{,}5343}e^{-2{,}5361k}$	1947–1963	$1 + \dfrac{ak}{[b - ak]^2 - b}$ $a = 2{,}5361$; $b = 0{,}4657$

Источник: [8. P. 677–686].

Таблица 3

Значения производственных функций, рассчитанные за 1947–1968 гг.

Год	Y	ПФ1	$\sigma_{ПФ1}$	$\varepsilon_{ПФ1}$	ПФ4	$\sigma_{ПФ4}$	$\varepsilon_{ПФ4}$
1947	77657	80959	0,4674	0,0425*	79790*	0,1303*	**0,0275***
1948	83484	85071		0,0190*	85049*	0,1303*	0,0187*
1949	79274	82932		0,0461*	83339*	0,1303*	0,0513*
1950	91946	88519		0,0373*	89332*	0,0188*	**0,0284***
1951	101840	96511		0,0523*	97694*	0,1477*	**0,0407***
1952	102199	100724		0,0144*	102117*	0,0003*	**0,0008***
1953	109438	107336		0,0192*	109033*	0,0303*	**0,0037***
1954	102252	104886		0,0258*	106043*	0,0565*	0,0371*
1955	116237	110587		0,0486*	112000*	0,0028*	**0,0365***
1956	119274	115738		0,0296*	117214*	0,0428*	**0,0173***
1957	118988	118725		0,0022*	119921*	0,0393*	0,0078*
1958	107741	114239		0,0603*	114810*	0,0158*	0,0656*
1959	122448	120850		0,0131*	122076*	0,0112*	**0,0030***
1960	122276	124270		0,0163*	125692*	0,0469*	0,0279*
1961	120357	124344		0,0331*	125902*	0,0659*	0,0461*
1962	130589	130497		0,0007*	132401*	0,0833*	0,0139*
1963	135569	134313		0,0093*	136341*	0,0612*	**0,0057***
1964	144393	139383		0,0347*	141943*	0,1527*	**0,0170***
1965	156481	148311		0,0522*	151161*	0,1381*	**0,0340***
1966	172171	160609		0,0672*	163861*	0,1404*	**0,0483***
1967	172015	166593		0,0315*	170307*	0,1973*	**0,0099***
1968	181604	173369		0,0453*	177808*	0,1623*	**0,0209***
Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ1}$				0,0319*	Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ4}$		0,0255*
Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$				0,0187*	Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ4}}$		0,0178*

Примечание. * Рассчитано автором (здесь и далее).

В табл. 3–5 полужирным шрифтом выделены значения относительной погрешности ε_{lj}, характеризующие наибольшее приближение исходных значений Y к расчетным, полученным с использованием предлагаемой δ-однородной производственной функции типа VES-функция по отношению к ПФ1, ПФ2, ПФ3 (см. табл. 2).

Таблица 4

Значения производственных функций, рассчитанные за 1947–1968 гг.

Год	Y	ПФ2	$\sigma_{ПФ2}$	$\varepsilon_{ПФ2}$	ПФ4	$\sigma_{ПФ4}$	$\varepsilon_{ПФ4}$
1947	77657	80706	0,6450*	0,0393*	79790*	0,1303*	**0,0275***
1948	83484	84846	0,6503*	0,0163*	85049*	0,1303*	0,0187*
1949	79274	82733	0,6524*	0,0436*	83339*	0,1303*	0,0513*
1950	91946	88320	0,6549*	0,0394*	89332*	0,0188*	**0,0284***
1951	101840	96303	0,6564*	0,0544*	97694*	0,1477*	**0,0407***
1952	102199	100519	0,6578*	0,0164*	102117*	0,0003*	**0,0008***
1953	109438	107124	0,6593*	0,0211*	109033*	0,0303*	**0,0037***
1954	102252	104651	0,6559*	0,0235*	106043*	0,0565*	0,0371*
1955	116237	110348	0,6572*	0,0507*	112000*	0,0028*	**0,0365***
1956	119274	115481	0,6570*	0,0318*	117214*	0,0428*	**0,0173***
1957	118988	118442	0,6551*	0,0046*	119921*	0,0393*	0,0078*
1958	107741	113938	0,6527*	0,0575*	114810*	0,0158*	0,0656*
1959	122448	120550	0,6549*	0,0155*	122076*	0,0112*	**0,0030***
1960	122276	123970	0,6559*	0,0139*	125692*	0,0469*	0,0279*
1961	120357	124050	0,6570*	0,0307*	125902*	0,0659*	0,0461*
1962	130589	130202	0,6583*	0,0030*	132401*	0,0833*	0,0139*
1963	135569	133921	0,6598*	0,0122*	136341*	0,0612*	**0,0057***
1964	144393	139093	0,6611*	0,0367*	141943*	0,1527*	**0,0170***
1965	156481	148015	0,6624*	0,0541*	151161*	0,1381*	**0,0340***
1966	172171	160303	0,6637*	0,0689*	163861*	0,1404*	**0,0483***
1967	172015	166292	0,6654*	0,0333*	170307*	0,1973*	**0,0099***
1968	181604	173278	0,6674*	0,0458*	177808*	0,1623*	**0,0209***
Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ2}$				0,0324*	Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ4}$		0,0255*
Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ2}}$				0,0184*	Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ4}}$		0,0178*

Таблица 5

Значения производственных функций, рассчитанные за 1947–1968 гг.

Год	Y	ПФ3	$\sigma_{ПФ3}$	$\varepsilon_{ПФ3}$	ПФ4	$\sigma_{ПФ4}$	$\varepsilon_{ПФ4}$
1947	77657	80832	0,2799*	0,0409*	79790*	0,1303*	**0,0275***
1948	83484	84914	0,2714*	0,0171*	85049*	0,1303*	0,0187*
1949	79274	83780	0,2677*	0,0568*	83339*	0,1303*	0,0513*
1950	91946	88342	0,2637*	0,0392*	89332*	0,0188*	**0,0284***
1951	101840	96306	0,2610*	0,0543*	97694*	0,1477*	**0,0407***
1952	102199	100502	0,2587*	0,0166*	102117*	0,0003*	**0,0008***
1953	109438	107087	0,2560*	0,0215*	109033*	0,0303*	**0,0037***
1954	102252	104664	0,2619*	0,0236*	106043*	0,0565*	0,0371*
1955	116237	110343	0,2596*	0,0507*	112000*	0,0028*	**0,0365***
1956	119274	115482	0,2600*	0,0318*	117214*	0,0428*	**0,0173***
1957	118988	118473	0,2632*	0,0043*	119921*	0,0393*	0,0078*
1958	107741	114007	0,2673*	0,0582*	114810*	0,0158*	0,0656*

Окончание табл. 5

Год	Y	ПФ3	$\sigma_{ПФ3}$	$\varepsilon_{ПФ3}$	ПФ4	$\sigma_{ПФ4}$	$\varepsilon_{ПФ4}$
1959	122448	120589	0,2637*	0,0152*	122076*	0,0112*	**0,0030***
1960	122276	123991	0,2619*	0,0140*	125692*	0,0469*	0,0279*
1961	120357	124050	0,2600*	0,0307*	125902*	0,0659*	0,0461*
1962	130589	130179	0,2578*	0,0031*	132401*	0,0833*	0,0139*
1963	135569	133870	0,2550*	0,0125*	136341*	0,0612*	**0,0057***
1964	144393	139011	0,2528*	0,0373*	141943*	0,1527*	**0,0170***
1965	156481	147901	0,2505*	0,0548*	151161*	0,1381*	**0,0340***
1966	172171	160151	0,2482*	0,0698*	163861*	0,1404*	**0,0483***
1967	172015	166090	0,2450*	0,0344*	170307*	0,1973*	**0,0099***
1968	181604	173010	0,2414*	0,0473*	177808*	0,1623*	**0,0209***
Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ3}$				0,0334*	Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ4}$		0,0255*
Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ3}}$				0,0191*	Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ4}}$		0,0178*

Заключение и выводы

Сравнение значений $\varepsilon_{ПФ1}$, $\varepsilon_{ПФ2}$, $\varepsilon_{ПФ3}$, $\varepsilon_{ПФ4}$ (см. табл. 3–5) показывает, что построенная авторами производственная функция типа VES-функция позволяет получить более точное приближение 65% значений величины конечного продукта экономической системы Y к исходным данным. В остальных точках ошибка приближения не превышает 6,5%.

Значения средней ошибки аппроксимации исходных данных и ее среднеквадратического отклонения (см. табл. 3–5) для построенной авторами производственной функции типа VES-функция (ПФ4) меньше, чем для CES-функции (ПФ1) и ранее разработанных VES-функций (ПФ2 и ПФ3). Следовательно, предлагаемый алгоритм построения производственных функций типа VES-функция дает более «устойчивое» приближение расчетных значений величины Y к ее исходным значениям.

Таким образом, можно отметить, что предложенный и реализованный алгоритм построения δ-однородной производственной функции типа VES-функция, отвечающей требованиям, предъявляемым к неоклассическим производственным функциям, способен обеспечить построение указанной функции с достаточно высокой точностью аппроксимации данных, характеризующих функционирование экономической системы.

Источники

1. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. МАТЛАБ 7. СПб. : БХВ-Петербург, 2004.

2. Бессонов В. А. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике. М. : Ин-т переходной экономики, 2002.

3. Вольных Е. В., Кутышкин А. В., Никоноров Ю. Г. Построение δ-однородной производственной VES-функция // Сибирский журнал индустриальной математики. 2007. Т. 10. № 2 (30). С. 31–44.

4. Моделирование экономических процессов : учеб. для студентов вузов / под ред. М. В. Грачевой, Л. Н. Фадеевой, Ю. Н. Черемных. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

5. Alcala L. A. A Generalized Variable Elasticity of Substitution Production Function with an Application to the Neoclassical Growth Model : conference paper for XLVIII Reunión Anual de la Asociacion Argentina de Economia Politica (November, 2013, Rosario, Santa Fe, Argentina). URL: https://www.researchgate.net/publication/259217948_A_Generalized_Variable_Elasticity_of_Substitution_Production_Function_with_an_Application_to_the_Neoclassical_Growth_Model.

6. Ferguson C. Capital-Labor Substitution and Technological Progress in the United States: Statistical Evidence from Transcendental Production Function. Mimeographed, 1965.

7. Karagiannis G., Palivos T., Papageorgiou C. Variable Elasticity of Substitution and Economic Growth: Theory and Evidence // New Trends in Macroeconomics / ed. by C. Diebolt, C. Kyrtsou. Heidelberg : Springer, 2005. P. 21–37.

8. Knox Lovell C. A. Estimation and Prediction with CES and VES Production Functions // International Economic Review. 1973. Vol. 14. Issue 3. P. 676–692.

9. Revankar N. S. A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions // Econometrica. 1971. Vol. 39. Issue 1. P. 61–71.

10. Sato R., Hoffman R. F. Production Function with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing // The Review of Economics and Statistics, 1968. Vol. 50. P. 453–460.

***

Using VES Production Functions for Modelling of Economic Systems' Functioning

by Gleb A. Sokol and Andrey V. Kutyshkin

The article presents the results of modelling of economic systems' functioning using production functions with variable elasticity of substitution of labour for capital (VES functions). Comparative analysis of the modelling results obtained using the already known analytical dependence for VES functions, with the algorithm proposed by the authors to construct production functions of this type showed the relevance of applying this algorithm to solve analogous problems. The suggested algorithm for constructing VES production functions was tested with the use of statistics published in the open sources.

Keywords: production function; substitution of labour for capital; elasticity of substitution of labour for capital; variable elasticity.

References:

1. Anufriev I. Ye., Smirnov A. B., Smirnova Ye. N. *MATLAB 7* [MATLAB 7]. Saint Petersburg: BHV-Peterburg Publ., 2004.

2. Bessonov V. A. *Problemy postroeniya proizvodstvennykh funktsiy v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike* [Problems of constructing production functions in the Russian economy in transition]. Moscow: Gaidar Institute for Economic Policy, 2002.

3. Volnykh Ye. V., Kutyshkin A. V., Nikonorov Yu. G. Postroenie δ-odnorodnoy proizvodstvennoy VES-funktsiya [Building δ-homogeneous VES production function]. *Sibirskii zhurnal industrial'noy matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, V. X, no. 2 (30), pp. 31–44.

4. Gracheva M. V., Fadeyeva L. N., Cheremnykh Yu. N. (eds.). *Modelirovaniye ekonomicheskikh protsessov* [Modeling of economic processes]. Moscow: YUNITY-DANA Publ., 2005.

5. Alcala L. A. A *Generalized Variable Elasticity of Substitution Production Function with an Application to the Neoclassical Growth Model: Conference Paper for XLVIII Reunión Anual de la Asociacion Argentina de Economia Politica* (November, 2013, Rosario, Santa Fe, Argentina). Available at: https://www.researchgate.net/publication/259217948_A_Generalized_Variable_Elasticity_of_Substitution_Production_Function_with_an_Application_to_the_Neoclassical_Growth_Model.

6. Ferguson C. *Capital-Labour Substitution and Technological Progress in the United States: Statistical Evidence from Transcendental Production Function*. Mimeographed, 1965.

7. Karagiannis G., Palivos T., Papageorgiou C. Variable Elasticity of Substitution and Economic Growth: Theory and Evidence in *New Trends in Macroeconomics* (eds. C. Diebolt, C. Kyrtsou). Heidelberg: Springer, 2005, pp. 21–37.

8. Knox Lovell C. A. Estimation and Prediction with CES and VES Production Functions. *International Economic Review*, 1973, Vol. 14, Issue 3, pp. 676–692.

9. Revankar N.S. A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions. *Econometrica*, 1971, Vol. 39, Issue 1, pp. 61–71.

10. Sato R., Hoffman R. F. Production Function with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing. *The Review of Economics and Statistics*, 1968, Vol. 50, pp. 453–460.

Contact Info:

Gleb A. Sokol, postgraduate of Computer Modeling & Information Technologies Dept.
Phones: (3467) 357-715, 357-538
e-mail: sokolgleb@gmail.com

Yugra State University
16 Chekhova St., Khanty-Mansiysk, Russia
628012

Andrey V. Kutyshkin, Dr. Sc. (Eng.), Prof. of Computer Modeling & Information Technologies Dept.
Phones: (3467) 357-715, 357-538
e-mail: avk_200761@mail.ru

Yugra State University
16 Chekhova St., Khanty-Mansiysk, Russia
628012